2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题参考答案

[非教育部考试中心官方标准答案，仅供参考]

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

解析： C

由 $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$, 得 $y=1$ 为水平渐近线

由 $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$ 得 $x=1$ 为垂直渐近线

由 $\lim\limits_{x\to -1} y=\dfrac{1}{2}\neq\infty$, 得 $x=-1$ 非垂直渐近线，选（C）

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$（　　）

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^n(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^n n!$

解析： A

$\because\ f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-2)+(e^x-1)\cdot 2e^{2x}\cdots(e^{nx}-n)$

$+(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots ne^{nx}$

$\therefore\ f'(0)=1\times(-1)\times\cdots\times(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

选（A）

（3）如果函数 $f(x,y)$ 在（0，0）处连续，那么下列命题正确的是（　　）

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

解析：(B)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=k$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f(0,0)=0 \\ \Delta z=f(x,y)-f(0,0)=0\cdot x+0\cdot y+o(\rho)\end{cases}$$

$\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,\ 0)$ 处可微.

（4）设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin xdx(k=1,2,3)$ 则有（　　）

（A）$I_1<I_2<I_3$　(B) $I_3<I_2<I_1$　(C) $I_2<I_3<I_1$　(D) $I_2<I_1<I_3$

解析： D

$$I_2=I_1+\int_\pi^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx=I_1-\int_\pi^{2\pi}e^{x^2}|\sin x|dx<I_1.$$

$$I_3=I_1-\int_\pi^{2\pi}e^{x^2}|\sin x|dx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx.$$

而 $\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx\underline{\underline{x=\pi+t}}-\int_\pi^{2\pi}e^{(t+\pi)^2}\sin tdt$

$$=\int_\pi^{2\pi}e^{(x+\pi)^2}|\sin x|dx>\int_\pi^{2\pi}e^{x^2}|\sin x|dx.$$

$\therefore I_3>I_1.$

$\therefore I_3>I_1>I_2.$

(5)设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

解析： C

$$\alpha_3+\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\c_3+c_4\end{pmatrix},\because \alpha_3+\alpha_4\text{与}\alpha_1\text{成比例.}$$

$\therefore \alpha_1$ 与 $\alpha_3+\alpha_4$ 线性相关,$\therefore \alpha_1$， α_3， α_4 线性相关，选 C

$$\text{或}\left|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=0$$

$\therefore \alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，选 C

（6）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $p^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 P=($\alpha_1$, α_2, α_3)，

$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$. 则 $Q^{-1}AQ$=(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解析：（B）

$$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$$

（7）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{x<y\}$=(　)

(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{2}{5}$　(D) $\frac{4}{5}$

解析：(A)

$$X \sim E(1)，Y \sim E(4) \Rightarrow f_x(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}. \quad f_Y(y)=\begin{cases} 4e^{-4y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}.$$

$\therefore X, Y$ 独立.

$$\therefore f(x,y)=\begin{cases} 4e^{-x}e^{-4y}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$P(X<Y)=\iint\limits_{x<y} f(x,y)d\delta$$

$$=\int_0^{+\infty} dx\int_x^{+\infty} 4e^{-x}e^{-4y}dy$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\int_x^{+\infty} e^{-4y}d(4y)$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot e^{-4x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-5x}dx$$

$$=\frac{1}{5}.$$

（8）将长度为 1m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为（　）

(A) 1　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) -1

解析：设一段长 X ,另一段 $Y=1-X$，

由 $\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

$$DX=D(1-X)=DY$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= EX(1-X) - EX\,E(1-x)\\ &= E(X-X^2) - EX[1-EX]\\ &= EX - EX^2 EX + (EX)^2\\ &= -EX^2 + (EX)^2 = -DX\end{aligned}$$

$\therefore \rho = 1$，选项 D

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）若函数 $f(x)$满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)$=_________.

解析： $\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_1=-2, \lambda_2=1$

$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0 \Rightarrow f(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x,$

代入 $f'(x)+f(x)=2e^x$ 得 $C_1=0, C_2=1.$

$\therefore f(x)=e^x$

（10）$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx =$ _________

解析： $\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx = \int_0^2 [(x-1)+1]\sqrt{1-(x-1)^2}\,d(x-1)$$

$$= \int_{-1}^1 (x+1)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

（11）$grad\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)} =$ _________

解析： {1，1，1}

$$grad\left(xy+\frac{z}{y}\right)=\left\{y,x-\frac{z}{y^2},\frac{1}{y}\right\}$$

$$grad\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=\{1,1,1\}$$

（12）设 $\sum=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 ds=$_____.

解析: $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

$$z=1-x-y,D:x+y\leq 1(x\geq 0,y\geq 0)$$

$$\iint\limits_{2} y^2 ds=\iint\limits_{D} y^2\cdot\sqrt{3}d\delta=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} y^2 dy$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1 (1-x)^3 dx=-\frac{\sqrt{3}}{12}(1-x)^4\Big|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

（13）设 X 为三维单位向量，E 为三阶单位矩阵，则矩阵 $E-XX^T$ 的秩为________.

解析：2.

设 $A=E-XX^T,A^2=A$

$$\Rightarrow r(A)+r(E-A)=3.$$

$$\because r(E-A)=r(XX^T)=r(X)=1$$

$$\therefore r(A)=2.$$

（14）设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\overline{C})=$_______.

解析： $\frac{3}{4}$

解：$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}$

$\because AC=\varnothing$，$\therefore ABC=\varnothing$.

$\therefore P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上.

（15）（本题满分 10 分）

证明 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}$ $(-1<x<1)$

证明：令 $\varphi(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}.\varphi(0)=0.$

$\varphi'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$

$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}x-\sin x$

$0<x<1$时. $\ln\frac{1+x}{1-x}>0,\frac{1+x^2}{1-x^2}x\geq x$，又$\sin x\leq x$.

$\therefore\varphi'(x)>0$；

$-1<x<0$时，$\ln\frac{1+x}{1-x}<0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}x\leq x$,又$\sin x\geq x$.

$\therefore\varphi'(x)<0$.

$\Rightarrow x=0$为$\varphi(x)$在（-1，1）内最小点，而φ（0）=0

$\therefore$当-1<x<1 时. $\varphi(x)\geq 0$，即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}$$

(16)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

解析：

由 $\begin{cases} f_x'=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \\ f_y'=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

$$f_{xx}''=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f_{xy}''=-y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f_{yy}''=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

当 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 时，$A=2e^{-\frac{1}{2}},B=0,C=e^{-\frac{1}{2}}$.

$\because AC-B^2>0$ 且 $A>0$，$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 为极小点.

极小值为 $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$.

当 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 时，$A=-2e^{-\frac{1}{2}},B=0,C=-e^{-\frac{1}{2}}$,

$\because AC-B^2>0$ 且 $A<0,\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 为极大点

极大值为 $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$

（17）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数

解：由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ 得 R=1.

当 $x=\pm 1$ 时. $\because \dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1} \to \infty (n\to\infty)$

$\therefore x=\pm 1$ 时级数发散.收敛域为（-1,1）

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+1)+\frac{2}{2n+1}\right]x^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'+2S_1(x)=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+2S_1(x)$$

当 x=0 时，S(0)=3.

当 $x\neq 0$ 时，$xS_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$[xS_1(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$xS_1(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\therefore S_1(x)=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$$\therefore S(x)=\begin{cases}3 & ,x=0\\ \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & ,-1<x<1\text{且}x\neq 0\end{cases}$$

（18）(本题满分 10 分)

已知曲线 L：$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \cos t \end{cases}$ （$0 \le t < \dfrac{\pi}{2}$），其中函数 $f(t)$具有连续导数，且 $f(0)=0$，

$f'(t)>0(0<t<\dfrac{\pi}{2})$，若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点距离值恒为 1，求函数 $f(t)$的表达式，并求此曲线 L 与 x 轴无边界的区域的面积.

解析：

① $k = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{-\sin t}{f'(t)}.$

切线为 $y = \cos t = -\dfrac{\sin t}{f'(t)}(x - f(t))$ ，令$y = 0 \Rightarrow$

$x = f(t) + f'(t) \cdot \cot t$,切线与 x 轴交点为 $(f(t) + f'(t)\cos t, 0)$.

由题意 $f'^2(t)\cot^2 t + \cos^2 t = 1$

$\Rightarrow f'^2(t) = \dfrac{\sin^4 t}{\cos^2 t}.$

$\because f'(t) > 0. \therefore f'(t) = \dfrac{\sin^2 t}{\cos t} = \sec t - \cos t.$

$f(t) = \ln|\sec t + \tan t| - \sin t + C$

$\because f(0) = 0, \therefore f(t) = \ln|\sec t + \tan t| - \sin t$

② $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot f'(t) dt$

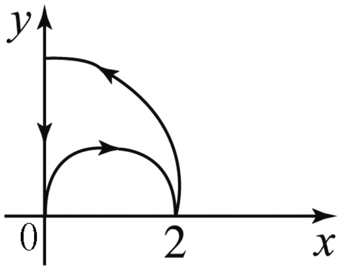
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t = I_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}.$

（19）（本题满分 10 分）

已知 L 是第一象限中从点(0,0)沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点(2,0),再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点（0，2）的曲线段，计算曲线积分 $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$

解析：

补充



$L_0: x=0(y_1=2, y_2=0)$

$I=\oint_{L+L_0} - \int_{L_0}$

$$\oint_{L+L_0} = \iint_D (3x^2+1-3x^2)d\sigma = \iint_D d\sigma = \int_0^2 (\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2x-x^2})dx$$

而 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi$

$\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}dx = \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$（依据定积分几何意义）

$$\therefore \oint_{L+L_0} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \int_{L_0} = \int_2^0 (-2y)dy = 4.$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{2} - 4.$$

（20）（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

（1）计算行列式|A|；

（2）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

解析：

（I）$|A| = 1+(-1)^5 a \cdot a^3 = 1-a^4$

（II）当$a=1$及$a=-1$时，$Ax=\beta$有无穷多个解.

当$a=1$时，

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&2\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

通解为$x=k\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

当$a=-1$时.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

通解为$x=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（21）（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{T}(A^{T}A)x$ 的秩为 2，

（1） 求实数 a 的值；

（2） 求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准型.

解析：

$$A^{T}A=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&a\\1&1&a&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{pmatrix}$$

$\because x^{T}(A^{T}A)x$ 秩为 2. $\therefore r(A^{T}A)=2$(也可以利用$r(A^{T}A)=r(A)=2$)

$\Rightarrow |A^{T}A|=0\Rightarrow a=-1$ （$\because |A^{T}A|=(a^2+3)(a+1)^2$）

(II)令 $A^{T}A=B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$

解 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$

当 $\lambda=0$时，由 $(0E-A)x=0$ 即 $Ax=0$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

当$\lambda=2$时,由$(2E-A)x=0\Rightarrow \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

当$\lambda=6$时,由$(6E-A)x=0\Rightarrow \xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

取$r_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},r_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},r_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

令$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

$$f=x^{\mathrm{T}}\mathrm{B}x\ \underline{\underline{x=Qy}}\ 2y_2^2+6y_3^2$$

（22）（本题满分 11 分）

设二维离散型随机变量 *X*、*Y* 的概率分布为

	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求$P\{X=2Y\}$;

（Ⅱ）求 $\operatorname{cov}(X-Y,Y)$.

解析：

Y / X	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) $P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=2)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

(2) $\operatorname{cov}(X-Y,Y)=\operatorname{cov}(X,Y)-\operatorname{cov}(Y,Y)$

$=EXY-EXEY-DY$

$$X\text{的边缘分布}X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

$$\therefore EX=\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{2}{3},EY=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

$$DY=EY^2-(EY)^2=1\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}-1=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$$

$$EXY=1\times1\times\frac{1}{3}+2\times2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{3}+\frac{4}{12}=\frac{2}{3}$$

$$\operatorname{cov}(X-Y,Y)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times1-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}.$$

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$。设 $Z=X-Y$.

（1）求 Z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$;

（2）设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_N$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$.

（3）证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

解析：

$X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim N(\mu,2\sigma^2)$，$X,Y$ 独立，$\sigma>0$，未知 $Z=X-Y$.

解：（1）Z 的密度 $f(z,\sigma^2)$

$X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim N(\mu,2\sigma^2), X,Y$ 独立.

$Z=X-Y \sim N(0,3\sigma^2)$

$$\therefore f(z,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3\sigma^2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot 3\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}$$

（2）设 $Z_1\cdots Z_n$ 样本.

似然出数 $L(Z_1,\cdots Z_n,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}{6\sigma^2}}$

$$\ln L(Z_1\cdots Z_n,\sigma^2)=n\ln\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$$

$$=-n\ln\sqrt{6\pi}\sigma-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$$

$$=-n\ln\sqrt{6\pi}-n\ln\sigma-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$$

$$\frac{d\ln L}{d\sigma^2}=0.$$

$$-\frac{n}{\sigma}\cdot\frac{1}{2}(\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2\cdot\left(-\frac{1}{\sigma^4}\right)=0,$$

$$\therefore \hat{\sigma}^2=\frac{\sum Z_i^2}{3n}$$

(3)即证 $E\hat{\sigma}^2=\sigma^2$,

$\because Z_i \sim N(0,3\sigma^2)$，$\therefore \dfrac{Z_i-0}{\sqrt{3\sigma^2}} \sim N(0,1)$，$Z_i$ 是简单随机样本.

$\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{Z_i}{\sqrt{3}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$, $\therefore E\dfrac{\sum Z_i^2}{3\sigma^2}=n$，$E\sum Z_i^2=3\sigma^2 n$.